מערכות משוואות הומוגניות

# הגדרה

מערכת משוואות לינארית נקראת הומוגנית אם כל הקבועים החופשיים הם 0:

אחרת (אם קיים ) מ.מ.ל נקראת אי-הומוגנית

## הערה

אם מערכת משוואות היא הומוגנית(אי-הומוגנית) אזי הצורה המדורגת שלה היא הומוגנית(אי-הומוגנית)

# על פתרון של מערכת הומוגנית אפשר להגדיר שתי פעולות:

## חיבור

יהיו , , , פתרונות אזי נגדיר למ. הומוגנית

גם פתרון לאותה מ.מ. הומוגנית

## כפל

יהיו למערכת הומוגנית ו סקלר נגדיר

גם פתרון לאותה מ.מ. הומוגנית

# בדיקה

אם פתרון אזי לכל מתקיים

אם אפשר להכפיל בסקלר ולקבל . נפתח את הסוגריים: כלומר פתרון.

# תרגיל בית

לבדוק ל

# הערה

למערכת הומוגנית תמיד קיים לפחות פתרון אחד – פתרון האפס:

ווקטורים ומרחבים ווקטוריים

# הגדרה

יהי F שדה. אוסף של n סקלרים מסודרים נקרא ווקטור ממימד n:

לווקטר הסקלר נקרא הקוארדינטה הi של

שני ווקטורים שווים אם לכל

# הגדרה

קבוצה של כל הווקטורים ממימד n נקראת מרחב ווקטורי (מרחב ווקטורי סטנדרטי ממימד n)

הערה:

# משפט

יהי F שדה ו. נגדיר שתי פעולות:

חיבור:

כפל:

נסמן ב

# מתקיים:

1) חוק חילוף לחיבור: לכל

2) חוק הקיבוץ לחיבור: לכל

3) קיום האפס: לכל

4) קיים ווקטור נגדי: אם ונסמן ב אזי

5) חוק הפילוג: , ,

, ,

6) אסוציאטיביות: , ,

7) מתקיים לכל

# הוכחה(ל5. ההוכחות האחרות דומות)

## משפט

יהי מ.מ. הומוגנית

פתרון כללי של המערכת הוא תת קבוצה ב. תת הקבוצה הזאת היא סגורה ביחס לפעולות חיבור וכפל בסקלר המוגדרות ב

*אזי*

## כלומר

תת מרחב ווקטורי

## הגדרה

יהי F שדה. קבוצה V נקראת מרחב ווקטורי מעל F אם מוגדרות שתי פעולות:

המקיימות את תכונות 1-7(של המרחב הווקטורי)

(בין השאר קיים ווקטור האפס, קיים ווקטור נגדי: לכל קיים כך ש)

איברים בV נקראים ווקטורים.

# תרגיל

מתקיים

# הגדרה

יהיו F שדה, V מרחב ווקטורי מעל F, תת קבוצה נקראת תת מרחב אם היא בעצמה מרחב ווקטורי ביחס לאותן הפעולות המוגדרות בV.

## דוגמה

פתרון כללי של מערכת הומוגנית זה תת מרחב ב

# משפט

תת מרחב אם ורק אם **סגורה** ביחס לחיבור וכפל בסקלר.

## הוכחה

אם W סגורה ביחס לחיבור וכפל => ולכן 1-7 מתקיימות בגלל שהן מתקיימות בV

### תוצאה

אם תת מרחב אזי

### דוגמה

אם פתרון כללי למערכת אי הומוגנית אזי U איננה תת מרחב שכן שכן (0,0,0…0) אינו יכול להיות פתרון של מערכת אי הומוגנית.

#### הערה

אמנם U אינו תת מרחב ביחס לפעולות הקיימות ב, אבל זה לא אומר שהיא לא יכולה להפוך למרחב ווקטורי בפני עצמה ביחס לפעולות אחרות.